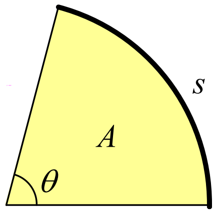
三角函數

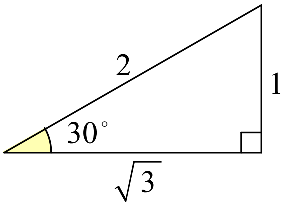
1 **扇形弧長、面積：**設扇形半徑r,圓心角θ(弧度),則

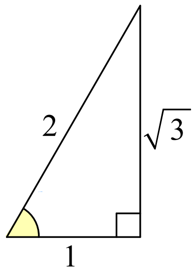
$$\begin{cases} 弧長\ s = r\cdot\theta \\ 扇形周長 = r + r + s = 2r + r\cdot\theta \\ 扇形面積\ A = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}r\cdot s \end{cases}$$

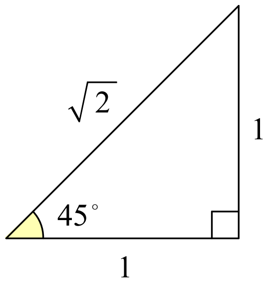


2 弧度(徑度)換算：$\pi\,(\text{弧度}) = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\ 弧度 \\ 1弧度 = \dfrac{180^\circ}{\pi}\ \left(\fallingdotseq \dfrac{180}{3.14} \fallingdotseq 57.29^\circ\right) \end{cases}$

$\pi^\circ \fallingdotseq 3.14^\circ$
π 弧度 $\fallingdotseq$ 3.14弧度 $= 180^\circ$





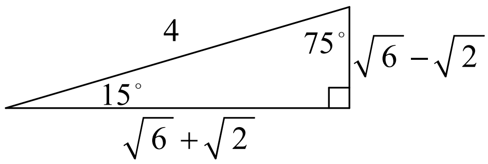


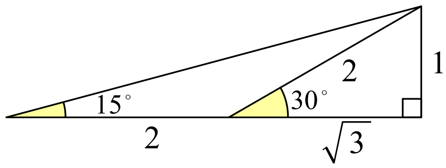
3 特殊三角函數值：

$\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　$\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　$\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$　　$\tan 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$



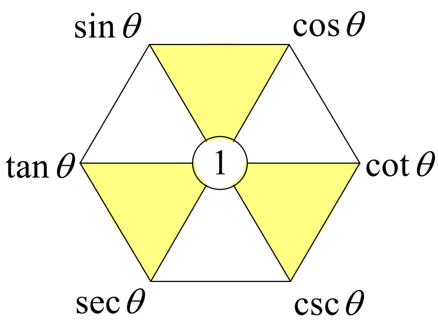


4 三角函數公式：

① 平方關係：$\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \\ 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \end{cases}$

② 商式關係：$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases}$

③ 倒數關係：$\begin{cases} \sin\theta\cdot\csc\theta = 1 \\ \cos\theta\cdot\sec\theta = 1 \\ \tan\theta\cdot\cot\theta = 1 \end{cases}$



④ 餘角關係：$\begin{cases}\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)\\ \cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)\end{cases}$ $\begin{cases}\tan\theta=\cot(90^\circ-\theta)\\ \cot\theta=\tan(90^\circ-\theta)\end{cases}$ $\begin{cases}\sec\theta=\csc(90^\circ-\theta)\\ \csc\theta=\sec(90^\circ-\theta)\end{cases}$

⑤ 常用恆等式：

$$\begin{cases}\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin2\theta\\ (\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin2\theta\\ \sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}=|\sin\theta+\cos\theta|\\ \sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=|\sin\theta-\cos\theta|\end{cases}$$

⑥ 和角公式：

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$$

⑦ 二倍角公式：

$$\begin{cases}\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta\\ \cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta\\ \tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{cases}$$

⑧ 半角公式：

$$\begin{cases}\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}\\ \sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}\end{cases}$$

⑨ 三倍角公式：

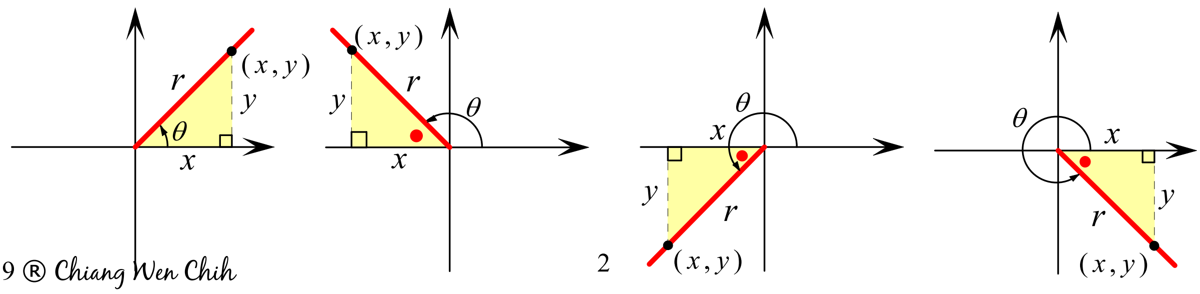
$$\begin{cases}\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{cases}$$

⑩ **廣義角三角函數的定義：**

設 $P(x,y)$ 為 θ 角終邊上異於原點的一點，O 表原點，$\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}$，

則我們定義：(分母中之 x,y 均不為 0)

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$



⑪ 象限角與三角函數值的正負關係：(倒數關係：不影響正負)

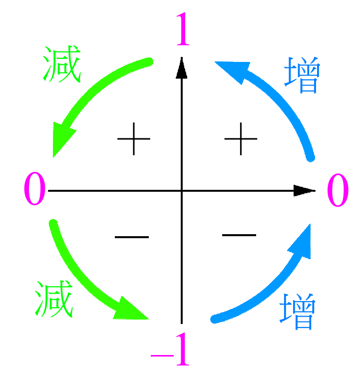
	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
第一象限角	+	+	+	+	+	+
第二象限角	+	−	−	−	−	+
第三象限角	−	−	+	+	−	−
第四象限角	−	+	−	−	+	−

特殊角 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 的三角函數值：(倒數關係：0 ↔ ╳)

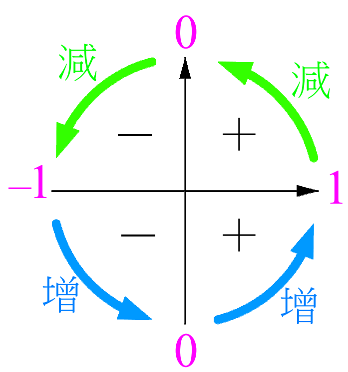
	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	無意義	1	無意義
90°	1	0	無意義	0	無意義	1
180°	0	−1	0	無意義	−1	無意義
270°	−1	0	無意義	0	無意義	−1

三角函數遞增、遞減：(倒數關係：增 ↔ 減)

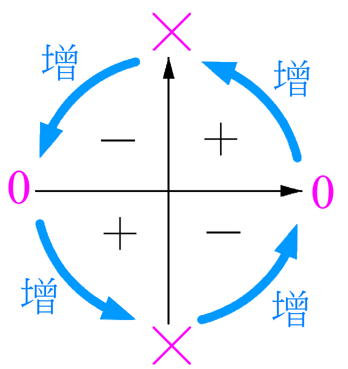
	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
第一象限角	增	減	增	減	增	減
第二象限角	減	減	增	減	增	增
第三象限角	減	增	增	減	減	增
第四象限角	增	增	增	減	減	減



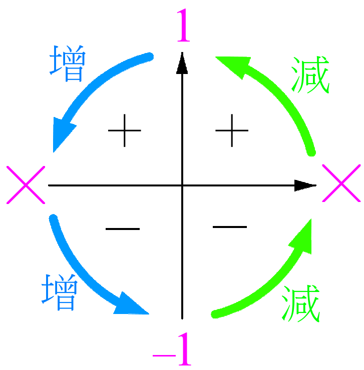
$\sin\theta$



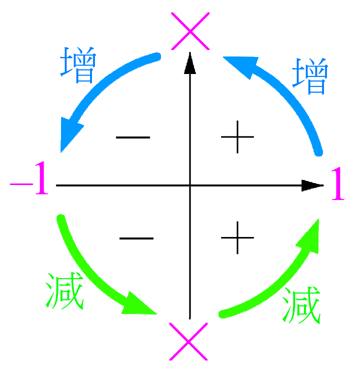
$\cos\theta$



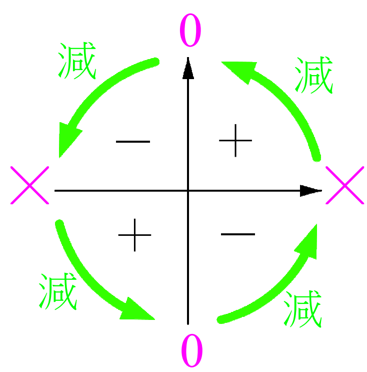
$\tan\theta$



$\csc\theta$



$\sec\theta$



$\cot\theta$

⑫ 廣義角化簡：

$$\begin{cases}\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta\\ \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta\\ \sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta\\ \sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\\ \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta\\ \cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta\\ \tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta\\ \tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta\\ \cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta\\ \cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta\\ \cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta\\ \sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta\\ \sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta\\ \sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\csc(180^\circ+\theta)=-\csc\theta\\ \csc(180^\circ-\theta)=\csc\theta\\ \csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta\\ \csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta\end{cases}$$

📖 **記憶規則**：① **判斷正負**：將θ角視為銳角，依「$180^\circ+\theta$為第三象限角，$180^\circ-\theta$為第二象限角，$360^\circ+\theta$為第一象限角，$360^\circ-\theta$為第四象限角」判斷原三角函數的正負！

② **決定函數**：遇到$180^\circ\pm\theta$，$360^\circ\pm\theta$，三角函數不變。

$$\begin{cases}\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta\\ \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\\ \sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta\\ \sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta\\ \tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta\\ \tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta\\ \tan(270^\circ-\theta)=\cot\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\sec(90^\circ+\theta)=-\csc\theta\\ \sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta\\ \sec(270^\circ+\theta)=\csc\theta\\ \sec(270^\circ-\theta)=-\csc\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\\ \cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta\\ \cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta\\ \cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta\\ \cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta\\ \cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta\end{cases}\quad \begin{cases}\csc(90^\circ+\theta)=\sec\theta\\ \csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta\\ \csc(270^\circ+\theta)=-\sec\theta\\ \csc(270^\circ-\theta)=-\sec\theta\end{cases}$$

📖 **記憶規則**：① **判斷正負**：將θ角視為銳角，依「$90^\circ+\theta$為第二象限角，$90^\circ-\theta$為第一象限角，$270^\circ+\theta$為第四象限角，$270^\circ-\theta$為第三象限角」判斷原三角函數的正負！

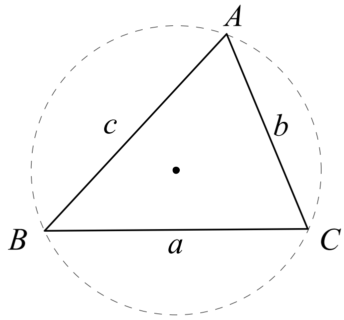
② **決定函數**：遇到$90^\circ\pm\theta$，$270^\circ\pm\theta$，改為**餘函數**，即$\sin\theta\leftrightarrow\cos\theta$，$\tan\theta\leftrightarrow\cot\theta$，$\sec\theta\leftrightarrow\csc\theta$。

⑬ **負角化簡**：

❶ $\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\\ \cot(-\theta)=-\cot\theta\\ \csc(-\theta)=-\csc\theta\end{cases}$ ❷ $\begin{cases}\cos(-\theta)=\cos\theta\\ \sec(-\theta)=\sec\theta\end{cases}$

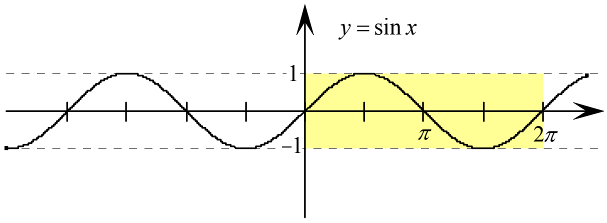
⑭ **正弦定理**：如右圖，ΔABC中，

$$\begin{cases}a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C\\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R\end{cases}$$（其中R是ΔABC外接圓半徑）

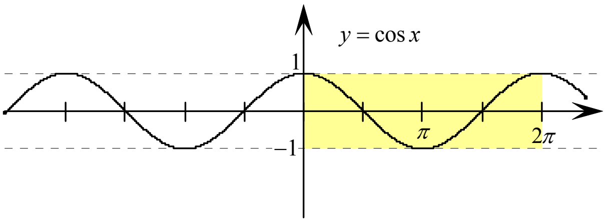


⑮ **餘弦定理**：如右圖，ΔABC中，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

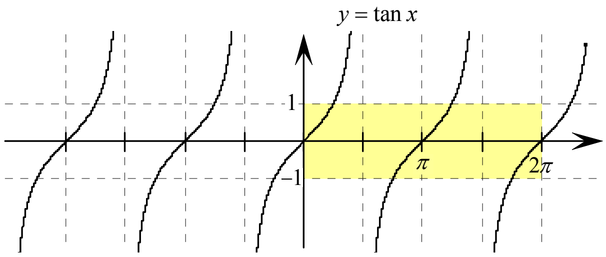
⑯ 三角函數的圖形：



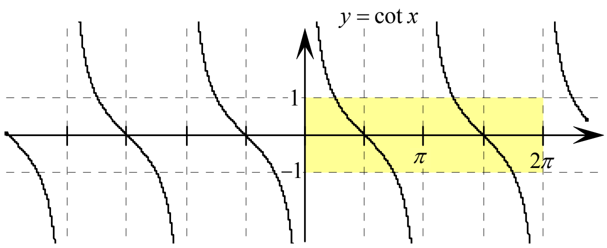
正弦函數 $y=\sin x$
定義域 $=\{x \mid x\in R\}$
值　域 $=\{y \mid -1\le y\le 1\}$
週　期 $=2\pi$



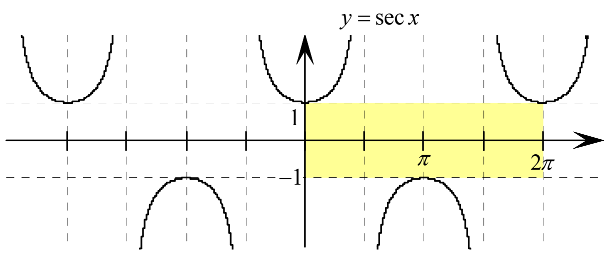
餘弦函數 $y=\cos x$
定義域 $=\{x \mid x\in R\}$
值　域 $=\{y \mid -1\le y\le 1\}$
週　期 $=2\pi$



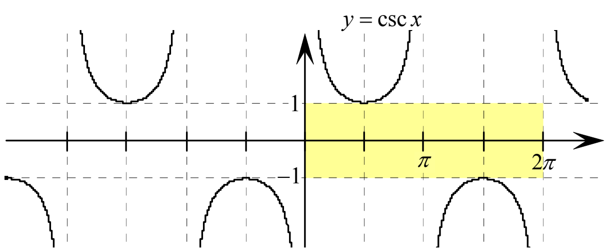
正切函數 $y=\tan x$
定義域 $=\{x \mid x\in R$ 但 $x\ne n\pi+\pi/2, n\in Z\}$
值　域 $=\{y \mid y\in R\}$
週　期 $=\pi$



餘切函數 $y=\cot x$
定義域 $=\{x \mid x\in R$ 但 $x\ne n\pi, n\in Z\}$
值　域 $=\{y \mid y\in R\}$
週　期 $=\pi$



正割函數 $y=\sec x$
定義域 $=\{x \mid x\in R$ 但 $x\ne n\pi+\pi/2, n\in Z\}$
值　域 $=\{y \mid y\ge 1$ 或 $y\le -1\}$
週　期 $=2\pi$



餘割函數 $y=\csc x$
定義域 $=\{x \mid x\in R$ 但 $x\ne n\pi, n\in Z\}$
值　域 $=\{y \mid y\ge 1$ 或 $y\le -1\}$
週　期 $=2\pi$

⑰ **三角函數週期：**

❶ 基本型：

函數	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$	$y=\sec x$	$y=\csc x$
週期	2π	2π	π	π	2π	2π

❷ 絕對值型：

函數	$y=\lvert\sin x\rvert$	$y=\lvert\cos x\rvert$	$y=\lvert\tan x\rvert$	$y=\lvert\cot x\rvert$	$y=\lvert\sec x\rvert$	$y=\lvert\csc x\rvert$
週期	π	π	π	π	π	π

❸ 偶次方型：(和絕對值型相同)

函數	$y=\sin^2 x$ $y=\sin^4 x$ $\vdots$	$y=\cos^2 x$ $y=\cos^4 x$ $\vdots$	$y=\tan^2 x$ $y=\tan^4 x$ $\vdots$	$y=\cot^2 x$ $y=\cot^4 x$ $\vdots$	$y=\sec^2 x$ $y=\sec^4 x$ $\vdots$	$y=\csc^2 x$ $y=\csc^4 x$ $\vdots$
週期	π	π	π	π	π	π

❹ 奇次方型：(和基本型相同)

函數	$y=\sin^3 x$ $y=\sin^5 x$ $\vdots$	$y=\cos^3 x$ $y=\cos^5 x$ $\vdots$	$y=\tan^3 x$ $y=\tan^5 x$ $\vdots$	$y=\cot^3 x$ $y=\cot^5 x$ $\vdots$	$y=\sec^3 x$ $y=\sec^5 x$ $\vdots$	$y=\csc^3 x$ $y=\csc^5 x$ $\vdots$
週期	2π	2π	π	π	2π	2π

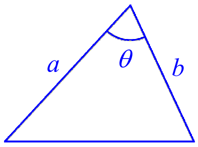
❺ 平移、伸縮後三角函數的週期：

函數	$y=a\cdot\sin(bx+c)+d$ $y=a\cdot\cos(bx+c)+d$ $y=a\cdot\sec(bx+c)+d$ $y=a\cdot\csc(bx+c)+d$	$y=a\cdot\tan(bx+c)+d$ $y=a\cdot\cot(bx+c)+d$
週期	$\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$

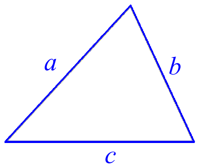
三角不等式

1. $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$
2. $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$ ，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$
3. $y=a\sin x+b\cos x$ 週期為 2π

三角形面積公式

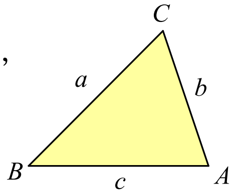


1 設三角形二邊長a,b及其夾角θ，則三角形面積為$\frac{1}{2}ab\sin\theta$



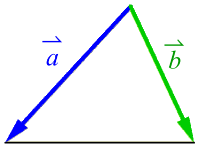
2 海龍公式：設ΔABC三邊長a,b,c，則ΔABC面積為

$\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$，其中$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

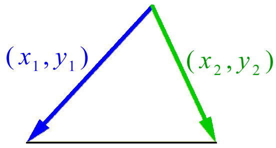


3 設ΔABC三邊長a,b,c，利用餘弦定理求出$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

再求得$\sin C$之值，則ΔABC面積為$\frac{1}{2}ab\sin C$

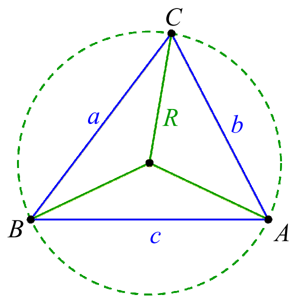


4 由$\vec{a},\vec{b}$所構成的三角形面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

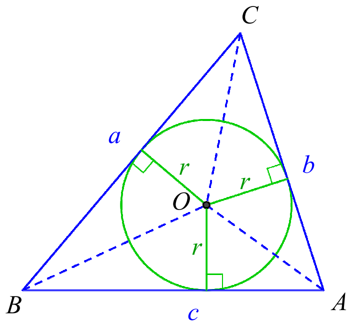


5 由$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$所構成的

三角形面積為$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

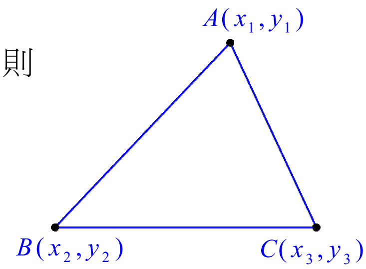


6 設ΔABC三邊長a,b,c，外接圓半徑R，則ΔABC面積為$\dfrac{abc}{4R}$



7 設ΔABC三邊長a,b,c，內切圓半徑r，

則ΔABC面積為$r\cdot s$，其中$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$



8 設ΔABC之三頂點坐標分別為$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，則

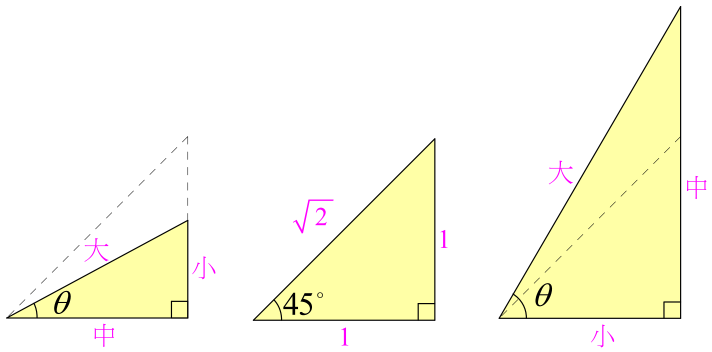
$$\Delta ABC\text{面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$$

三角函數比大小

1

$$\begin{cases} -1 \le \sin\theta \le 1 \iff |\sin\theta| \le 1 \\ -1 \le \cos\theta \le 1 \iff |\cos\theta| \le 1 \\ \tan\theta \in R \\ \cot\theta \in R \\ \sec\theta \ge 1 \text{或} \sec\theta \le -1 \iff |\sec\theta| \ge 1 \\ \csc\theta \ge 1 \text{或} \csc \le -1 \iff |\csc\theta| \ge 1 \end{cases}$$



2

$0^\circ < \theta < 45^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$45^\circ < \theta < 90^\circ$
$0 < \sin\theta < \cos\theta < 1$	$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 > \sin\theta > \cos\theta > 0$
$0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$	$\tan\theta = \cot\theta = 1$	$\tan\theta > 1 > \cot\theta > 0$
$\csc\theta > \sec\theta > 1$	$\csc\theta = \sec\theta = \sqrt{2}$	$1 < \csc\theta < \sec\theta$