

測驗科目	數學	測驗班級	
測驗時間	80 分鐘	批閱方式	☒ 人工閱卷 ☐ 電腦閱卷 (請勾選)
命題教師	李欣儒	命題範圍	高中數學第四冊 (龍騰出版社) 2-3 ~ 3-3

答案請寫在答案欄內，否則不予計分

一、單選題：

() 1. 選出經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的矩陣：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

() 2. 下列哪一個 a 值使得聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+az=a-1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$ 有無限多組解？

(1) $a=1$ (2) $a=2$ (3) $a=3$ (4) $a=4$ (5) $a=5$.

() 3. 下列哪一條直線與 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 平行？

(1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ (2) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ (3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ (4) $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$
 (5) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

二、多選題：

() 1. 關於矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ，選出正確的選項： (1) A 有 2 列 3 行 (2) A 是 3×2 階的矩陣 (3) A 是 2 階方陣 (4) 第(1,2)元是 2 (5) 6 是第(3,2)元 .

() 2. 設 $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ 滿足 $a_{ij} = \begin{cases} i, & i > j \\ j, & i \leq j \end{cases}$ ，下列何者為真？ (1) $a_{32} = 3$ (2) $a_{22} = 2$ (3) $a_{43} = 4$ (4) 所有元素和為 50 (5) 所有元素和為 100 .

() 3. 小迷糊使用高斯－喬登消去法，在紙上解三元一次方程組如下：

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a & 8 \\ 0 & 5 & -3 & b \\ 0 & 1 & c & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，其中數字 a, b, c 不慎污損，下列何者為真？
 (1) $a=1$ (2) $b=-18$ (3) $b=-3$ (4) $c=1$ (5) $c=-12$.

() 4.關於直線 $L: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$, 選出正確的選項: (1) L 的方向向量為 $(1, 1, 3)$ (2)點 $(2, 3, 7)$ 在 L 上 (3) L 與直線 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}$ 平行 (4) L 與平面 $x+2y-z=1$ 平行 (5) L 落在平面 $3x+3y-2z=1$ 上 .

() 5.設 A 與 B 為二階方陣, I 為二階單位方陣, 下列各敘述何者為真? (1) $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$ (2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (3) $A^2 - I = (A+I)(A-I)$ (4) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

三、填充題：

1.已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 且 $X+A=B$, 求 $X =$ _____ .

2.已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, 求 $AC+BC =$ _____ .

3.已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 經過列運算, 得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$, 求 $a+b =$ _____ .

4.求通過 $A(3, 1, 5)$ 且與 $\vec{v} = (2, 3, 4)$ 平行之直線參數式為_____ .

5.設 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 14 \\ 31 \end{bmatrix}$, 且矩陣 $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 滿足 $AX=B$, 求
(1) A 的反方陣 $A^{-1} =$ _____ . (2) $X =$ _____ .

6.設矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $A^{100} =$ _____ .

7.求過點 $P(1, 1, -1)$, 且包含直線 $L: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 的平面方程式為_____ .

8.已知直線 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, 都在平面 E 上, 則平面 E 的方程式為 _____ .

9.空間中, 一道雷射光由點 $A(0, 6, 12)$ 射向點 $B(6, b, -6)$, 行走的路徑中與 x 軸交於 C 點, 求 C 點的坐標 .

10.已知矩陣 A, B 滿足 $A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^2 - B^2$.

11. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 滿足 $AMC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩陣 M .

12. 已知 M 為 3×2 階矩陣, 且滿足 $M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 求 $M \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$.

13. 小明與小華兩人共用一個保險箱, 為了防盜起見, 須經常更換密碼. 於是兩人約定用一個二階方陣的第一列與第二列之各元作為密碼. 例如: 矩陣 $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 表示密碼為 1245. 但為了怕太容易被破解, 於是先將矩陣 X 左乘二階方陣 A 得到矩陣 B , 即 $AX = B$, 再將矩陣 A 與 B 同時傳給對方, 當對方收到後再還原得到 X , 便可知道密碼. 今小明收到小華傳來的矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 試問密碼為何?

四、計算題 (請寫下計算或思考過程, 否則不予計分)

1. 解聯立方程式
$$\begin{cases} x + 5y - 2z = 7 \\ x - 4y + z = -5 \\ 7x - 3y - z = 0 \end{cases}$$
.

2. 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況, 依訂定的標準將國民分為高收入和低收入兩類. 統計發現: 高收入的人口中, 每年有 2 成會轉變為低收入; 低收入的人口中, 每年有 3 成會轉變為高收入. 已知目前全國國民有 3 成為高收入, 7 成為低收入.

(1) 兩年後低收入人口占全國國民多少百分比?

(2) 長期而言, 低收入人口是高收入人口的幾倍?

3. 已知 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 試以 rA (r 為實數) 的形式表示 A^2, A^3, A^4, A^5 .

(2) 設 $(I + \frac{1}{2}A)^5 = aI + bA$, 求實數 a, b 的值.

4. 小明從家裡到學校有甲、乙兩條路線可以走, 他每天依下述方法決定上學的路線: 若某一天走乙路線上學, 則次日一定走甲路線; 若某一天走甲路線上學, 則次日丟一枚公正硬幣, 出現正面就走甲路線, 反面就走乙路線上學.

(1) 寫出小明選擇上學路線的轉移矩陣.

(2) 若星期一小明以丟硬幣決定上學路線, 則他在星期三走甲路線上學的機率為何?

答案欄

班級：_____ 座號：_____ 學生姓名：_____

一、單選題

1.	2.	3.

二、多選題

1.	2.	3.	4.	5.

三、填充題

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	

四、計算題（請寫下計算或思考過程，否則不予計分）

1.	2.
3	4

答案欄

班級：_____ 座號：_____ 學生姓名：_____

三、 單選題

1.	2.	3.
1	3	4

四、 多選題

1.	2.	3.	4.	5.
25	1234	125	1235	13

三、填充題

1	2	3	4	5(1)	5(2)	6
$\begin{bmatrix} -1 & -8 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 & 24 \\ -27 & 20 \end{bmatrix}$	4		$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
7	8	9	10	11	12	13
	$7x + 5y - 3z - 1 = 0$	(4,0,0)	$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	1314

四、計算題（請寫下計算或思考過程，否則不予計分）

1. $x = 2, y = 3, z = 5$	2.
3 (1) $2A, 4A, 8A, 16A$ (2) $a = 1, b = \frac{31}{2}$	4 (1) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{5}{8}$