主題 1　二階行列式 2×2 Determinant

（1）二階行列式的定義：

設 $a,b,c,d\in R$，則符號 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 稱為二階行列式，其值為 $ad-bc$，即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$ 。

（2）二階行列式的性質：

① 行列互換其值不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

② 二行（或二列）對調，其值變號：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}\ ,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

③ 同一行（或同一列）可提出共同因數：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ kb_1 & b_2 \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ ,\quad \begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

④ 二行（或二列）成比例，其值為 0：

$$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ ka_1 & a_2 \end{vmatrix}=0\ ,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{vmatrix}=0$$

⑤ 將一行（或一列）乘以 k 倍加至另一行（或一列）其值不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+ka_1 \\ b_1 & b_2+kb_1 \end{vmatrix}\ ,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix}$$

$\times k$　　$\times k$

⑥ 兩個二階行列式，若有一行（或一列）同一位置元素皆相同，則可相加成一個行列式。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c+e \\ b & d+f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+h & b+m \\ c+k & d+n \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a & b+m \\ c & d+n \end{vmatrix}}+\underbrace{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h & m \\ k & n \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} h & b+m \\ k & d+n \end{vmatrix}}$$

主題 2　二階行列式的應用－克拉瑪公式

(1) 克拉瑪公式：

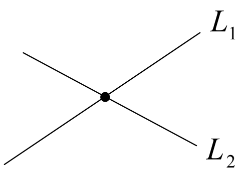
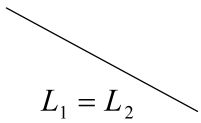
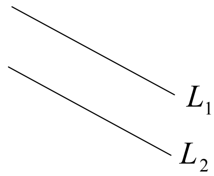
設二元一次方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，

① 若 $\Delta\neq 0$，則方程組恰有一組解 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

② 若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，則方程組無限多組解。

③ 若$\Delta=0$但$\Delta_x\neq 0$或$\Delta_y\neq 0$，則方程組無解。

註

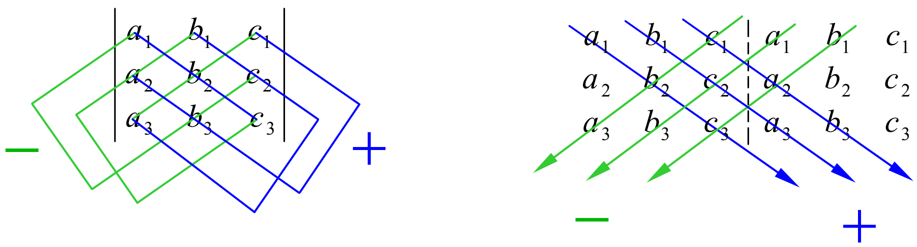
二直線 $L_1: a_1x+b_1y=c_1$ $L_2: a_2x+b_2y=c_2$	恰交一點 	無限多個交點 （重合） 	沒有交點 （平行，非重合） 
二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$	恰有一解	無限多解	無解
方程組名稱	相容方程組	相依方程組	矛盾方程組
方程式係數比	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$
克拉瑪公式	$\Delta\neq 0$	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$	$\Delta=0$ 但 $\Delta_x\neq 0$ 或 $\Delta_y\neq 0$

主題 3　三階行列式 3 ×3 Determinant

(1)　定義：

① **直接展開：** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3)$

記憶　規則



② **降階法則：** 依 $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ 將行列式對某一行（列）降為二階行列式展開。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{（由第一列展開）}$$

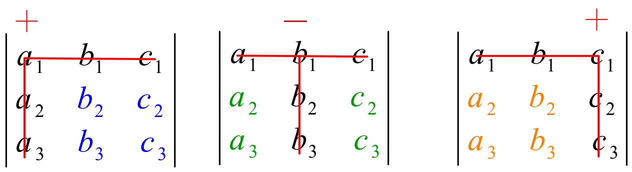
$$= -a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{（由第二列展開）}$$

$$= -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{（由第二行展開）}$$

$$= c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{（由第三行展開）}$$

記憶　規則

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{（由第一列展開）}$$



（2）三階行列式的性質：

① 行列互換其值不變：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

② 任二行（或二列）對調，**其值變號**：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

③ 同一行（或同一列）可提出共同因數：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k a_2 & k b_2 & k c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

④ 任二行（或二列）成比例，其值為 0：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k a_2 & k b_2 & k c_2 \end{vmatrix} = 0$

⑤ 將一行（或一列）乘以 k 倍加至另一行（或一列）其值不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + k a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + k a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + k a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\times k$

⑥ 兩個三階行列式，若有二行（或二列）同一位置元素皆相同，則可相加成一個三階行列式。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + d_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + h_1 & c_1 + k_1 \\ a_2 & b_2 + h_2 & c_2 + k_2 \\ a_3 & b_3 + h_3 & c_3 + k_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + k_3 \end{vmatrix}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & k_1 \\ a_2 & h_2 & k_2 \\ a_3 & h_3 & k_3 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 + k_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 + k_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 + k_3 \end{vmatrix}}$$

主題 4　三階行列式的應用－克拉瑪公式

（1）克拉瑪公式：三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，則

① $\Delta\neq 0 \Leftrightarrow$ 恰有一組解 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

② $\Delta=0$ 且 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ 中至少有一個不為 $0 \Rightarrow$ 無解

③ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{無解} \\ \text{無限多組解} \end{cases}$